

1) On a $u_0=33$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1}=u_n+2.$$

Ainsi, la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 avec $u_0=33$.

2) D'après 1), on a

$$u_n=u_0+2\times n=33+2n.$$

3) De janvier 2011 à avril 2011 il y a 4 mois: la production en avril 2011 est u_3 .

De janvier 2011 à octobre 2013 il y a $12+12+10=34$ mois: la production en octobre 2013 est u_{33} .

La production totale cherchée est

$$\begin{aligned} S &= u_3 + u_5 + \dots + u_{33} \\ &= (33 + 2 \times 3) + (33 + 2 \times 4) + \dots + (33 + 2 \times 33) \\ &= (33 + 33 + \dots + 33) + 2 \times (3 + 4 + \dots + 33). \end{aligned}$$

Dans la somme $33+33+\dots+33$, il y a autant de termes 33 que de termes dans la somme $u_3+u_4+\dots+u_{33}$, soit $33-2=31$.

Par suite

$$S = 31 \times 33 + 2 \times [(1 + 2 + \dots + 33) - (1 + 2)]$$

$$= 31 \times 33 + 2 \times \left(\frac{33 \times 34}{2} - 3 \right).$$